

$V_i(t)$  = potencial de conductor  $I$  en el momento  $t$

$V_x(t)$  = potencial del punto  $X$  en el tiempo  $t$

Tenga en cuenta que  $D_{ij} = a_i$ , el radio del conductor  $I$ .

La ecuación (3.17) expresa la diferencia de potencial entre conductores  $I$  y un punto  $x$  seleccionado arbitrariamente. Si el punto  $x$  se lleva al infinito, el voltaje  $V_{ix}$  se convertirá en el voltaje absoluto de conductor  $i$ ,  $V_i$ . Para derivar el voltaje absoluto del conductor  $i$ , la expresión general para  $V_{ix}$  es reescrito como:

$$V_{ix}(t) = \frac{1}{2\epsilon_0} \sum_{j=1}^{norte} \frac{q_j(t)}{D_{ij}} - \frac{1}{2\epsilon_0} \sum_{j=1}^{norte} \frac{q_j(t)}{D_{jx}}$$

Ahora observe que si los  $n$  conductores son los únicos objetos con carga eléctrica, la suma de las cargas eléctricas,  $q_1(t), \dots, q_{norte}(t)$ , debe ser igual a cero, es decir,

$$\sum_{j=1}^{norte} q_j(t) = 0 \quad (3,18)$$

En este caso se puede demostrar que (se anima al lector a probarlo):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2\epsilon_0} \sum_{j=1}^{norte} \frac{q_j(t)}{D_{jx}} = 0 \quad (3,19)$$

Entonces el voltaje absoluto del conductor  $i$  es

$$V_i(t) = \frac{1}{2\epsilon_0} \sum_{j=1}^{norte} \frac{q_j(t)}{D_{ij}} \quad (3,20)$$

La prueba del límite de la ecuación. (3.19) sigue.

**Prueba:** La ecuación (3.18) se resuelve para  $q_n(t)$ :

$$q_{norte}(t) = - \sum_{j=1}^{norte-1} q_j(t)$$

Luego sustituya arriba en la cantidad de la ecuación (3.19) y reorganice para obtener.

$$\frac{1}{2\epsilon_0} \sum_{j=1}^{norte} \frac{q_j(t)}{D_{jx}} = \frac{1}{2\epsilon_0} \sum_{j=1}^{norte-1} \frac{q_j(t)}{D_{jx}} + \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{q_n(t)}{D_{nx}} = \frac{1}{2\epsilon_0} \sum_{j=1}^{norte-1} \frac{q_j(t)}{D_{jx}} + \frac{1}{2\epsilon_0} \sum_{j=1}^{norte-1} \frac{q_j(t)}{D_{jx}}$$

Tenga en cuenta que como  $X$ , el radio  $\frac{D_{nx}}{D_{jx}}$  1.0. El logaritmo de esta razón llega a cero. Por lo tanto, la ecuación

(3,19).

Es conveniente repetir los supuestos bajo los cuales Eq. (3.20) se ha obtenido:

**Supuesto 1:** La suma de todos los cargos es igual a cero, es decir  $q_j(t) = 0$ , y **Supuesto 2:** La

carga eléctrica es distribuida uniformemente en la superficie de los conductores. Esta suposición es equivalente a:  $D_{ij} \gg a_i, I_j$ .

La primera suposición es válida para cualquier configuración de línea de transmisión, asumiendo que se han tenido en cuenta todos los conductores. Para las líneas aéreas, dado que el suelo conductor representa uno de los conductores, esto significa que también se debe tener en cuenta la tierra. Este problema se aborda en la siguiente sección. La segunda suposición siempre es válida para circuitos aéreos. Para circuitos con conductores agrupados, cables trifásicos, etc., la suposición puede no dar como resultado resultados precisos. En estos casos, deben emplearse métodos computacionales más sofisticados.

La ecuación (3.20) se puede transformar en una ecuación que relacione la corriente capacitiva del conductor con el voltaje del conductor. Para este propósito, Eq. (3.20) se diferencia con respecto al tiempo, cede.

$$\frac{dv_j(t)}{dt} = \frac{1}{D_{jj}^2} \text{ en } \frac{1}{D_{jj}} \frac{dq_j(t)}{dt}$$

Por definición, la derivada del tiempo de la carga eléctrica del conductor es la corriente capacitiva del conductor (o corriente de carga):

$$\frac{dq_j(t)}{dt} = I_j' \text{ corriente capacitiva del conductor } j$$

Tras la sustitución, tenemos

$$\frac{dv_j(t)}{dt} = \frac{1}{D_{jj}^2} \text{ en } \frac{1}{D_{jj}} I_j' t \quad (3,21)$$

La ecuación (3.21) es la ecuación básica para modelar los efectos capacitivos de una línea eléctrica multiconductora. Para el análisis de estado estable sinusoidal, la ecuación (3.21) se convierte en una ecuación algebraica. Para ello, recuerde que en condiciones de estado estacionario sinusoidal, la tensión y las corrientes tendrán la siguiente variación temporal general:

$$v_j t = \text{Re } 2\sqrt{e} \tilde{v}_j t \tilde{I}_j$$

$$I_i' t \quad \text{Re} \quad 2E \sqrt{\epsilon_0} \quad \text{decir } j t$$

dónde  $\tilde{V}_i$  y  $\tilde{I}_i$  son números complejos que representan los fasores del voltaje y el corriente Actual. Sustitución en la ecuación. (3.21) y solución para  $\tilde{V}_i$  Nos da

$$\tilde{V}_i = \frac{1}{j\omega C_{ij}} I_{norte} - \sum_{j=1}^{norte} X'_{ij} \tilde{I}_j \quad I = 1, 2, \dots, norte \quad (3.22)$$

donde  $d_{ii} = a_i$ , el radio del conductor  $i$ .

Es conveniente definir las siguientes cantidades:

$$X'_{ij} = \frac{1}{j\omega C_{ij}} \text{ en } \frac{1}{D_{ij}} \text{ ohm metros} \quad (3.23a)$$

$$X'_{ii} = \frac{1}{j\omega C_{ii}} \text{ en } \frac{1}{a_i} \text{ ohm metros} \quad (3.23b)$$

que se llamará el componente de separación de la reactancia capacitiva y el conductor componente de la reactancia capacitiva respectivamente. Estas cantidades dependen de la geometría y el material de los componentes de la reactancia capacitiva. Usando estas variables, Ecuación (3.22) toma la siguiente forma simple:

$$\tilde{V}_i = \sum_{j=1}^{norte} X'_{ij} \tilde{I}_j \quad (3.24)$$

Se observa que se han tabulado los componentes de la reactancia capacitiva para todos los conductores disponibles comercialmente. Como en el caso de los componentes de la reactancia inductiva, tenga en cuenta que el lector matemáticamente riguroso se sentirá ofendido por las expresiones para  $X'_{ii}$  y  $X'_{ij}$ , ya que

involucrar los términos en  $\frac{1}{a_i}$  y  $\frac{1}{D_{ij}}$ . Debe observarse que si las cantidades  $a_i$  y  $D_{ij}$  son

expresado en las mismas unidades, el resultado final será correcto. Por este motivo se ha aceptado que  $a_i$  y  $D_{ij}$  se expresarán en pies en el entendido de que cada cantidad  $X'_{ii}$ ,  $X'_{ij}$  no tiene sentido si se considera individualmente.

En resumen, los efectos capacitivos de una línea eléctrica se representan con la ecuación. (3.21). Específicamente, para cada conductor en una línea eléctrica, se puede escribir una ecuación que relacione la corriente capacitiva de los conductores y la derivada en el tiempo del voltaje del conductor. Para el análisis de estado estable sinusoidal, estas ecuaciones se convierten en un conjunto de ecuaciones algebraicas [Ecuación (3.24)] que relaciona los fasores de las corrientes capacitivas del conductor al fasor de la tensión del conductor.

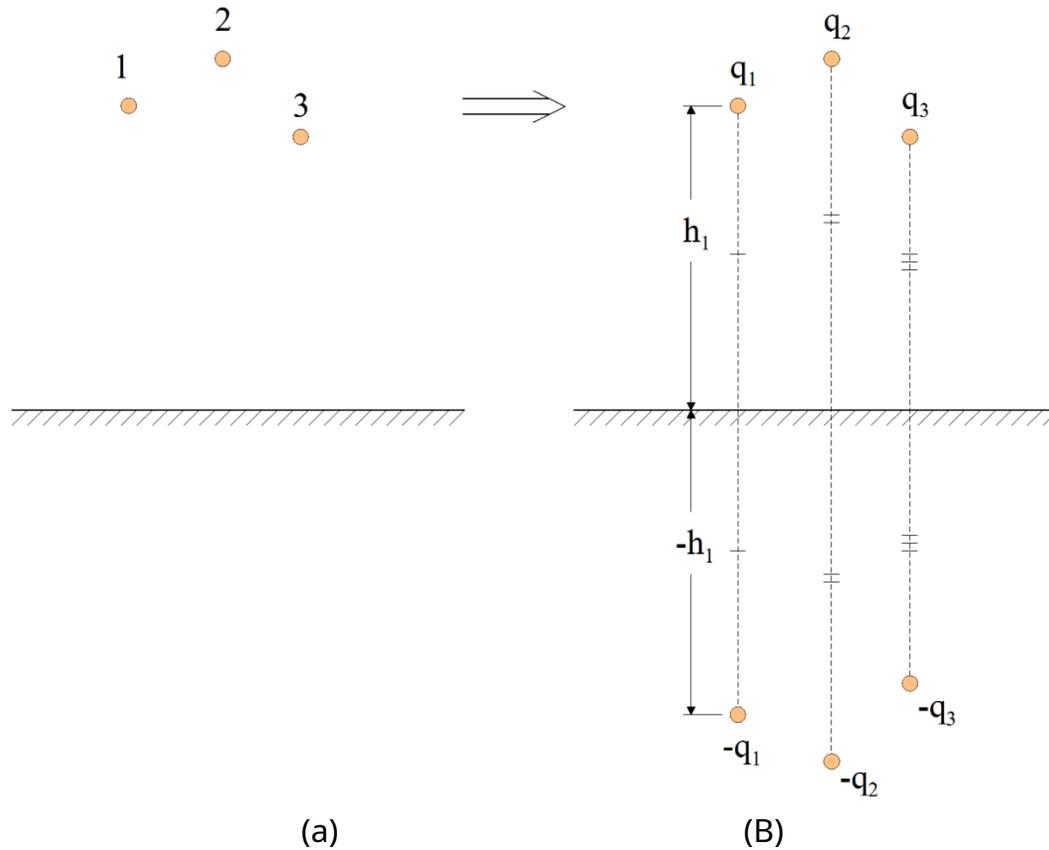
### 3.2.3.3 Ecuaciones capacitivas de una línea multiconductora por encima de la tierra

La mayoría de las líneas de transmisión aéreas tienen cables de tierra para protegerlas de los rayos. Las líneas de distribución aéreas tienen conductores neutros para un retorno de corriente desequilibrado. Todas las líneas eléctricas aéreas están suspendidas sobre la tierra. Los cables neutros / de tierra y la tierra son medios conductores en las proximidades de la línea que pueden estar cargados con carga eléctrica debido al campo eléctrico de la línea. Alternativamente, estos medios conductores alteran el campo eléctrico de la línea y afectan la capacitancia de la línea. En esta sección examinamos métodos mediante los cuales se pueden cuantificar los efectos de los cables de tierra y neutros o aéreos sobre la capacitancia de la línea.

El efecto de los cables neutros / de tierra se puede calcular de forma sencilla tratando estos cables de la misma forma que los conductores de fase. Debe observarse que el voltaje de los cables neutros / tierra será muy diferente del voltaje de los conductores de fase. En realidad, el voltaje de los cables neutros o de tierra es aproximadamente cero en condiciones normales de funcionamiento. Para las aplicaciones habituales, se supone que el voltaje de los cables neutros o de tierra es exactamente cero.

El cálculo del efecto de la tierra sobre la reactancia capacitiva de una línea, en general, es un problema difícil. Para simplificar el análisis, se asume que la tierra es un medio semi-infinito perfectamente conductor. En este caso, la teoría de las imágenes se aplica directamente, lo que arroja un procedimiento de análisis bastante simple. En concreto, el problema de una línea de transmisión situada sobre tierra se sustituye por otro problema equivalente que no incluye la tierra, pero incluye las imágenes de los conductores con respecto a la superficie de la tierra.

Considere una línea multiconductora por encima de la tierra. El espacio alrededor de la línea consta de dos medios: un medio no conductor y uno altamente conductor. Suponga que la interfaz es un plano, como se ilustra en la figura 3.19. Los conductores de la línea están ubicados en el medio no conductor. El conductor de tierra está cargado con carga eléctrica. Los conductores cargados establecerán un campo eléctrico en el medio 1. El campo eléctrico en el medio 2 será cero ya que el medio 2 es un conductor perfecto. La teoría de las imágenes [???] garantiza que el campo eléctrico en el espacio del medio 1 establecido por el conductor cargado es idéntico al campo eléctrico generado por dos conductores, el conductor original ubicado en el espacio libre, y otro que es el imagen geométrica del conductor real con respecto a la interfaz plana de los dos medios. Si la carga eléctrica del conductor es  $q$ , la carga eléctrica de su imagen es  $-q$ . Esta condición garantiza que la intensidad del campo eléctrico en la interfaz será perpendicular a la interfaz del plano. Por tanto, las condiciones de contorno del problema coinciden. Una consecuencia de esta condición es que si el voltaje del conductor es  $V$ , el voltaje de su imagen será  $-V$ .



**Figura 3.19: Línea multiconductora por encima de la tierra**  
 [(a) Disposición del conductor, (b) Disposición del conductor y de la imagen]

Considere la línea de transmisión general suspendida sobre la tierra, como se ilustra en la Figura 3.19a. La aplicación de la teoría de las imágenes da como resultado la configuración equivalente de la Figura 3.19b. Posteriormente, las corrientes capacitivas de los conductores se calculan de la siguiente manera: Las tensiones de los conductores,  $\tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \dots, \tilde{V}_{norte}$  se expresan en términos de las corrientes capacitivas  $\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \dots, \tilde{I}_n$ . En este análisis también se incluyen las corrientes capacitivas de las imágenes. El voltaje del conductor lo haré ser:

$$\tilde{V}_i = X_{ij}^{norte} \tilde{I}_j + \sum_{j=1}^{norte} X_{ij}^{imagen} \tilde{I}_j \quad I_{1, 2, \dots, norte} \quad (3,26)$$

dónde:

$$X'_{ij} = \frac{1}{j2\pi\epsilon_0 D_{ij}} \text{ en } \frac{1}{D_{ij}}$$

$$X'_{ij} = \frac{1}{j2\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{D_{ij}} - \frac{1}{D_{ij}'} \right]$$

$D_{ij}$  = distancia entre conductores i, j

$D_{ij}'$  = distancia entre los conductores i, y la imagen del conductor j (que es la misma como la distancia entre el conductor j y la imagen del conductor i)

La ecuación (3.26) se reescribe combinando los términos con la misma corriente eléctrica, obteniendo el forma compacta:

$$\tilde{V}_i = \sum_{j=1}^{norte} \frac{1}{D_{ij}} I_j \quad i=1, 2, \dots, norte \quad (3.27)$$

Suponiendo que los voltajes  $\tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \dots, \tilde{V}_{norte}$  son conocidas, Eq. (3.27) se resuelve para proporcionar la capacitiva corrientes  $\tilde{Y}_0, \tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_0$ . La tierra también llevará corrientes capacitivas,  $\tilde{I}'_{mi}$  que viene dado por el ecuación

$$\tilde{I}'_{mi} = \sum_{j=1}^{norte} \tilde{I}'_j$$

El procedimiento se ilustra con un ejemplo que involucra una línea trifásica.

**Ejemplo E3.3:** Considere la línea trifásica del Ejemplo E3.2 ilustrada en la Figura E3.2. Calcule la matriz de capacitancia de esta línea (a) ignorando el efecto tierra y (b) teniendo en cuenta el efecto tierra. Compare la capacitancia de secuencia positiva con y sin el efecto tierra.

Usando el resultado (b) calcule la corriente capacitiva de esta línea de transmisión asumiendo que está conectada a una fuente balanceada de 115 kV y la longitud de la línea es de 10 millas.

#### (a) Solución ignorando el efecto Tierra

Usando la fórmula para los términos de la matriz de reactancia capacitiva:

$$X'_{ij} = \frac{1}{j\omega C_{ij}} \text{ en } \frac{1}{D_{ij}}$$

La matriz de reactancia capacitiva  $X$  con  $D_{ij}$  expresado en pies es:

$$X = \begin{bmatrix} 155,15 & -127,70 & -128,69 \\ -127,70 & 155,15 & -104,76 \\ -128,69 & -104,76 & 155,15 \end{bmatrix} \quad \text{METRO } \mu\text{etro}$$

La reactancia de secuencia positiva se calcula como la diferencia entre el  $y_0$  y el promedio de los términos mutuos, de la siguiente manera:

$$X_{11} = X_s + X_{\text{metro}} \left( X_{11} + X_{22} + X_{33} \right) \frac{1}{3} \quad \begin{matrix} 12 \\ 13 \\ 23 \end{matrix}$$

$$= 155,15 + \frac{1}{3} (127,70 + 128,69 + 104,76) \text{METRO metro} = 275,53 \text{METRO metro}$$

y la capacitancia de secuencia positiva se obtiene de la capacitiva de secuencia positiva reactancia como:

$$C_1 = \frac{1}{X_1} = \frac{1}{377 \cdot 275,53 \cdot 10^6} \text{ F/m} = 9,6269 \text{ pF/m}$$

### (b) Solución que incluye el efecto Tierra

Usando la fórmula para los términos de la matriz de reactancia capacitiva:

$$X'_{ij} = \frac{1}{j2} \ln \frac{D_{ij}'}{D_{ij}}$$

El primer término diagonal es:

$$X'_{11} = \frac{1}{j2} \ln \frac{D_{11}'}{D_{11}} = \frac{1}{j60,4} \ln \frac{38,48 \text{ metro}}{0,0118 \text{ metro}} \quad \text{metro} = 374,72 \text{METRO metro}$$

Calculando los términos restantes de manera similar, la matriz de reactancia capacitiva completa  $X$  es como sigue:

$$X = \begin{matrix} & \begin{matrix} 12 \\ 13 \\ 23 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 12 \\ 13 \\ 23 \end{matrix} & \begin{matrix} 374,72 & 94,17 & 88,95 \\ j94,17 & 378,39 & 114,33 \\ 88,95 & 114,33 & 369,70 \end{matrix} \end{matrix} \quad \text{METRO metro}$$

Como en el inciso a), la reactancia de secuencia positiva se calcula como la diferencia entre el promedio términos propios y mutuos, de la siguiente manera:

$$X_{11} = X_s + X_{\text{metro}} \left( X_{11} + X_{22} + X_{33} \right) \frac{1}{3} \quad \begin{matrix} 12 \\ 13 \\ 23 \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{3} (374,72 + 378,39 + 369,70 + 94,17 + 88,95 + 114,33) \text{METRO metro} = 275,11 \text{METRO metro}$$

y la capacitancia de secuencia positiva se obtiene de la capacitiva de secuencia positiva reactancia como:

$$C_1 = \frac{1}{X_1} = \frac{1}{377 \cdot 275,11 \cdot 10^6} \text{ F/m} = 9,6413 \text{ pF/m}$$

Tenga en cuenta que, como se esperaba, la capacitancia de secuencia positiva real es ligeramente superior al valor calculado ignorando el efecto tierra. (El error en este caso es solo del 0,15% y generalmente disminuye con la altura de la línea).

Para calcular la corriente de carga, evaluamos la matriz de susceptancia capacitiva  $B = j\omega C$  como el inverso de  $X$ :

$$B = jC = j \begin{bmatrix} 2.938 & 0.5710 & 0.5303 \\ 0.5710 & 3.0621 & -0.7985 \\ 0.5303 & -0.7985 & 3.0794 \end{bmatrix} \text{ nS/m}$$

y por lo tanto:

$$C = \begin{bmatrix} 7.7933 & -1.5145 & -1.4067 \\ -1.5145 & 8.0271 & -2.1180 \\ -1.4067 & -2.1180 & 8.1685 \end{bmatrix} \text{ pF/m}$$

y finalmente la corriente capacitiva se calcula multiplicando la matriz de susceptancia por el vector de voltaje correspondiente a un sistema balanceado línea a línea de 115 kV, como sigue:

$$I = jCV = jBV = jB \begin{bmatrix} 66.390 / 0^\circ & 3.7268 / 90.578^\circ \\ 66,390 / -120^\circ & 3.9696 / -26.961^\circ \\ 66,390 / 120^\circ & 4.0069 / -153.550^\circ \end{bmatrix} \text{ A}$$

Tenga en cuenta que aunque el voltaje está equilibrado, la corriente de carga no está equilibrada debido a la asimetría de la capacitancia de la línea.

### 3.2.4 Modelos de línea para estado estable sinusoidal

Consideramos las condiciones de funcionamiento sinusoidales de estado estable. En este caso, los voltajes y corrientes impuestos en la línea de transmisión varían sinusoidalmente con la frecuencia  $f$ . Dado que la línea es un sistema lineal, las corrientes y voltajes en cualquier punto,  $y$ , de la línea variarán sinusoidalmente con el tiempo. Así, en general,

$$y_o(y, t) = \text{Re} \left\{ \sqrt{2} \tilde{Y}_o(y) e^{j\omega t} \right\} \quad (3.32a)$$

$$v(y, t) = \text{Re} \left\{ \sqrt{2} \tilde{V}(y) e^{j\omega t} \right\} \quad (3.32b)$$

dónde  $\tilde{Y}_o(y)$ ,  $\tilde{V}(y)$  y  $\tilde{I}(y)$  son números complejos (fasores) y  $\omega = 2\pi f$ . Los modelos de una línea soltero o trifásica en las condiciones descritas se desarrollan en las siguientes secciones.

### 3.2.4.1: Línea de transmisión monofásica

Sean  $r$ ,  $L$  y  $C$  la resistencia, inductancia y capacitancia, todas por unidad de longitud de una línea monofásica. Si consideramos una longitud infinitesimal  $dy$  de esta línea, el modelo de parámetros agrupados de la longitud infinitesimal se muestra en la Figura 3.20.

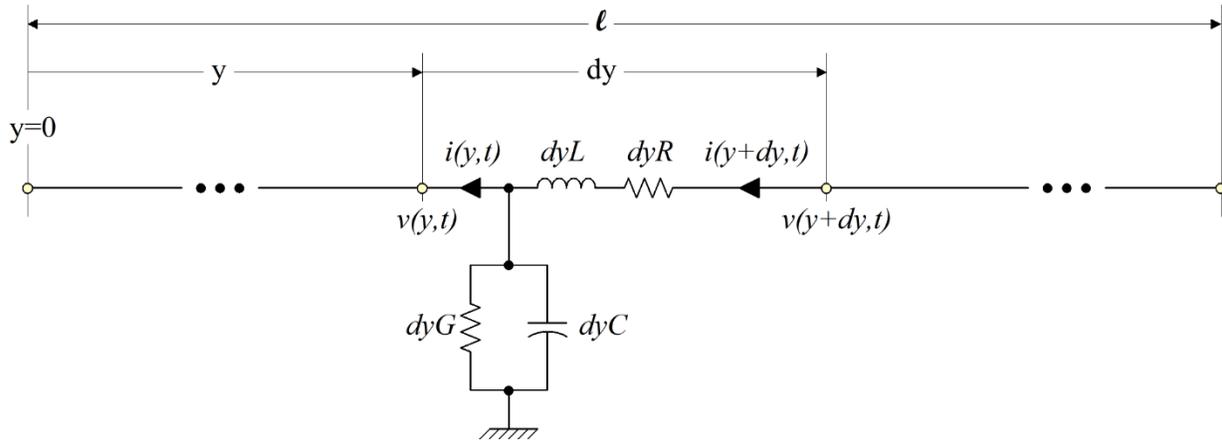


Figura 3.20: Línea de transmisión con parámetros distribuidos

Aplicando la ley de voltaje y corriente de Kirchoff a este circuito:

$$v(y+dy, t) - v(y, t) - dyRi(y, t) - dyL \frac{di(y, t)}{dt} = 0$$

$$i(y, t) - i(y+dy, t) - dyGv(y, t) - dyC \frac{dv(y, t)}{dt} = 0$$

Dividiendo ambas ecuaciones por  $dy$  tomando el límite como  $dy$  va a cero, se obtiene:

$$\frac{dv(y, t)}{dy} = -Ri(y, t) - L \frac{di(y, t)}{dt}$$

$$\frac{di(y, t)}{dy} = -Gv(y, t) - C \frac{dv(y, t)}{dt}$$

La diferenciación de la primera ecuación con respecto a  $y$ , produce:

$$\frac{\partial^2 v(y, t)}{\partial y^2} = -R \frac{i(y, t)}{y} - L \frac{\partial^2 i(y, t)}{\partial y \partial t} - RGv(y, t) - RC \frac{\partial v(y, t)}{\partial t} - L \frac{\partial^2 i(y, t)}{\partial y \partial t}$$

Diferenciación de la segunda ecuación con respecto a  $t$  y sustituyendo el resultado de arriba en la ecuación uno obtiene:

$$\frac{\partial^2 v(y,t)}{\partial y^2} + RGv(y,t) + RC \frac{\partial v(y,t)}{\partial t} + L \frac{\partial^2 v(y,t)}{\partial t^2} = C \frac{\partial^2 v(y,t)}{\partial t^2}$$

$$RGv(y,t) + RC \frac{\partial v(y,t)}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 v(y,t)}{\partial t^2}$$

En resumen, las ecuaciones diferenciales de una línea monofásica son:

$$\frac{\partial^2 v(y,t)}{\partial y^2} + RGv(y,t) + RC \frac{\partial v(y,t)}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 v(y,t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial v(y,t)}{\partial t} = L \frac{\partial i(y,t)}{\partial t}$$

Tras la sustitución de las Ecs. (3.32) en las ecuaciones anteriores, obtenemos

$$\sqrt{2} \operatorname{Re} m_{j,t} \frac{D_2 \tilde{V}(y)}{dy^2} = \sqrt{2} \operatorname{Re} [ {}_2LCV(\tilde{años}) + j(GL - CR)V(\tilde{años}) - GRV(\tilde{y}) ] e_{j,t}$$

$$\sqrt{2} \operatorname{Re} m_{j,t} \frac{dV(\tilde{años})}{dy} = \sqrt{2} \operatorname{Re} m_{j,t} (R - jL) y \tilde{V}(y)$$

La ecuación anterior debe satisfacerse para cualquier tiempo t. Así, los coeficientes de las funciones de tiempo en los dos lados de la ecuación debe ser idéntico, dando.

$$\frac{D_2 \tilde{V}(y)}{dy^2} = {}_2LC + j(GL - CR) - GRAMOV(y)$$

$$\frac{dV(\tilde{años})}{dy} = (R - jL) Y \tilde{V}(y)$$

Tras la factorización de la expresión del lado derecho, tenemos

$$\frac{D_2 \tilde{V}(y)}{dy^2} = (R - jL)(G - jC)V(y) \quad (3.33a)$$

$$\frac{dV(\tilde{años})}{dy} = (R - jL)Y \tilde{V}(y) \quad (3.33b)$$

Ahora definamos

$$Z_s = \frac{1}{y_s} \quad R + jL = \text{Impedancia en serie por unidad de longitud de la línea a frecuencia.}$$

$$y_{sh} = \frac{1}{Z_{sh}} \quad \text{GRAMO } jC = \text{admitancia de derivación por unidad de longitud de la línea a frecuencia}$$

Con la nueva notación, la ecuación (3.33) se convierte en

$$\frac{D_2 \tilde{V}(y)}{dy^2} - z y_{sh} \tilde{V}(y) = 0 \quad (3.34a)$$

$$\frac{d\tilde{V}(y)}{dy} - z_s \tilde{I}_o(y) = 0 \quad (3.34b)$$

Las ecuaciones (3.34) representan la línea monofásica modelo en estado estable sinusoidal. El general solución de Eq. (3.34a) es

$$\tilde{V}(y) = a e^{py} + b e^{-py} \quad (3.35)$$

donde a, b son constantes que dependen de las condiciones de contorno de la línea, y

$$p = \pm \sqrt{z_s y_{sh}} = \pm \sqrt{(R + jL)(G + jC)} \quad (3.36)$$

Tenga en cuenta que p depende de la frecuencia angular. Las dimensiones de la constante p son la inversa de la longitud. La constante p caracteriza la propagación de voltaje a través de la línea de transmisión. Por esta razón se le llama constante de propagación. Las partes real e imaginaria de la constante de propagación se denominarán constante de atenuación y de fase, respectivamente. Es decir,  $p = \alpha + j\beta$ , donde  $\alpha$  es la constante de atenuación y  $\beta$  es la constante de fase.

La solución general para el fasor de corriente eléctrica,  $\tilde{I}_o(y)$  se obtiene sustituyendo la Ec. (3.35) en la ecuación. (3.34b). El resultado es

$$\tilde{I}_o(y) = \frac{p a g}{Z_s} (a e^{py} - b e^{-py})$$

Observa eso

$$\frac{p a g}{Z_s} = \sqrt{\frac{y_{sh}}{z_s}}$$

Definir

$$Z_0 = \frac{1}{Y_0} \sqrt{\frac{Z_s}{y_{sh}}} \quad (3,37)$$

Tenga en cuenta que la cantidad  $Z_0$  tiene dimensiones de impedancia y es característico de la línea de transmisión considerada. Se llamará impedancia característica de la línea. En términos de impedancia característica  $Z_0$ , la ecuación de la corriente de línea se convierte en

$$\tilde{Y}_0(y) = \frac{a}{Z_0} m_{i_{py}} - \frac{B}{Z_0} m_{i_{py}} + Y_{\theta} e_{py} + Y_{\theta} e_{py} \quad (3,38)$$

En resumen, la solución general para los fasores de voltaje y corriente en una ubicación  $y$  de una línea monofásica viene dada por las ecuaciones (3.35) y (3.38). La solución se expresa en términos de la constante de propagación  $p$ , la impedancia característica  $Z_0$ , y dos constantes  $a$  y  $b$ . Las cantidades  $p$  y  $Z_0$  dependen de los parámetros de la línea, mientras que las constantes  $a$ ,  $b$  dependen de las condiciones de contorno. Si se dan suficientes condiciones de contorno, por ejemplo, la tensión y la corriente de los terminales en un extremo de la línea, las constantes  $a$  y  $b$  se pueden expresar en función de los datos de contorno.

Como ejemplo, asumiremos que se sabe que el voltaje y la corriente en el extremo receptor de la línea de la Figura 3.1 son  $V_R$  y  $I_R$ . Tengá en cuenta que el extremo receptor de esta línea se caracteriza con  $y = 0$ . Luego

$$\begin{aligned} \tilde{V}(y=0) &= \tilde{V}_R = a + B \\ \tilde{Y}_0(y=0) \tilde{I}_R &= \frac{a}{Z_0} - \frac{B}{Z_0} \end{aligned}$$

Al resolver las dos ecuaciones anteriores para las constantes  $a$  y  $b$  obtenemos

$$\begin{aligned} a &= \frac{\tilde{V}_R + Z_0 \tilde{I}_R}{2} \\ B &= \frac{\tilde{V}_R - Z_0 \tilde{I}_R}{2} \end{aligned}$$

La sustitución en las ecuaciones (3.8) y (3.9) nos da

$$\tilde{V}(y) = \tilde{V}_R \frac{m_{i_{py}} + m_{i_{py}}}{2} + Z_0 \tilde{I}_R \frac{m_{i_{py}} - m_{i_{py}}}{2} = \tilde{V}_R \cosh(py) + Z_0 \tilde{I}_R \sinh(py) \quad (3,39a)$$

$$\tilde{I}(y) = \frac{\tilde{V}_R}{Z_0} \frac{m_{i_{py}} - m_{i_{py}}}{2} - \frac{\tilde{V}_R - Z_0 \tilde{I}_R}{2} \frac{m_{i_{py}} + m_{i_{py}}}{2} \quad (3,39b)$$

Las ecuaciones (3.39) proporcionan los fasores de voltaje y corriente en cualquier ubicación y a lo largo de la línea en términos de voltaje y corriente en el extremo receptor de la línea ( $y = 0$ ). De especial interés son los voltaje y corriente en el otro extremo de la línea ( $y = l$ ):

$$\begin{aligned} \tilde{V} &= \tilde{V}_R \cosh(\gamma l) + Z_0 \tilde{I}_R \sinh(\gamma l) \\ \tilde{I} &= \tilde{I}_R \cosh(\gamma l) + Y_0 \tilde{V}_R \sinh(\gamma l) \end{aligned}$$

En notación matricial compacta:

$$\begin{pmatrix} \tilde{V}_S \\ \tilde{I}_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\gamma l) & Z_0 \sinh(\gamma l) \\ Y_0 \sinh(\gamma l) & \cosh(\gamma l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{V}_R \\ \tilde{I}_R \end{pmatrix}$$

Esta ecuación establece que el voltaje y la corriente del extremo de envío son una combinación lineal del voltaje y la corriente del extremo de recepción, y viceversa. Tres parámetros describen este modelo completamente: (a) la impedancia característica de la línea  $Z_0$ ; (b) la constante de propagación de la línea,  $\gamma$ ; y (c) la longitud de la línea,  $l$ . Tenga en cuenta que el modelo depende solo del producto  $\gamma l$  y la impedancia característica  $Z_0$ . Alternativamente, los siguientes parámetros describen completamente el línea de transmisión monofásica: (a)  $A = \cosh(\gamma l)$ , (b)  $B = Z_0 \sinh(\gamma l)$ , y (c)

$C = Y_0 \sinh(\gamma l)$ . En términos de los parámetros A, B, C, las ecuaciones lineales (3.39) se vuelven

$$\tilde{V}_S = A\tilde{V}_R + B\tilde{I}_R \quad (3.40a)$$

$$\tilde{I}_S = C\tilde{V}_R + A\tilde{I}_R \quad (3.40b)$$

Estos parámetros se conocen como la constante A, B, C de la línea. Tenga en cuenta que

$$A_2 \text{ antes de Cristo } \cosh(\gamma l) \text{ pecado } \sinh(\gamma l) \text{ pecado } \cosh(\gamma l) = 1.0$$

Por tanto, los parámetros A, B y C no son independientes. El conocimiento de los dos es suficiente para determinar el tercero.

El modelo anterior de una línea de transmisión monofásica se puede representar con un circuito equivalente. La derivación de circuitos equivalentes se analiza en la sección 3.2.5.

### 3.2.4.2 Línea de transmisión trifásica

El mismo análisis se puede aplicar a las líneas de transmisión trifásicas. Suponiendo sinusoidal estable estado, las ecuaciones (3.30a) y (3.31b) de la línea de transmisión trifásica se convierten en

$$\frac{d^2 \tilde{V}(y)}{dy^2} = (R - jL)(G - jC) \tilde{V}(y) \quad (3.41a)$$

$$\frac{d\tilde{V}(y)}{dy} = (R - jL) \tilde{y} \tilde{I}_o(y) \quad (3.41b)$$

Defina las siguientes matrices:

$$Z_s = R - jL$$

$$Y_{sh} = G - jC$$

Luego

$$\frac{d^2 \tilde{V}(y)}{dy^2} = Z_s Y_{sh} \tilde{V}(y) \quad (3.42a)$$

$$\frac{d\tilde{V}(y)}{dy} = Z_s \tilde{I}_o(y) \quad (3.42b)$$

Las ecuaciones diferenciales matriciales anteriores en variables complejas describen completamente el desempeño de una línea de transmisión trifásica general. La solución de estas ecuaciones para condiciones de contorno específicas producirá las corrientes eléctricas y los voltajes de cualquier fase en cualquier ubicación de la línea. Sin embargo, la solución de las ecuaciones anteriores es bastante difícil. En la siguiente sección discutimos las transformaciones que descomponen las ecuaciones matriciales (3.42) en ecuaciones escalares. De esta forma, la solución de las ecuaciones matriciales (3.42) se reduce a la solución de un conjunto de ecuaciones escalares.

### 3.2.4.3 Descomposición modal

El modelo de una línea de transmisión trifásica en condición de estado estable sinusoidal se define mediante las ecuaciones (3.42). La solución de estas ecuaciones es en general compleja porque las matrices

$Z_s, Y_{sh}$  son matrices completas que dan como resultado un conjunto de tres ecuaciones diferenciales acopladas. Para simplificar la solución, observe que es posible encontrar una transformación  $T$  del vector voltaje y corriente

$\tilde{V}(y)$  y  $\tilde{I}_o(y)$  como sigue:

$$\tilde{V}(y) = \tilde{V}_m(y) T^{-1} \tilde{V}(y) \quad (3.43a)$$

$$\tilde{I}_o(y) = \tilde{I}_m(y) T \tilde{I}_o(y) \quad (3.43b)$$

donde  $T$  es un 3 x 3 matriz,  $\tilde{V}_m(y)$  son los voltajes transformados en la ubicación  $y$  de la línea, y  $\tilde{I}_m(y)$  son las corrientes transformadas en la ubicación  $y$  de la línea. Sustitución de la transformación anterior en la ecuación (3.42) y la subsiguiente pre-multiplicación de la ecuación resultante por  $T$  da como resultado

$$\frac{d^2 \tilde{V}^{(m)}(y)}{dy^2} = T^{-1} Z Y_{ss} T V_h^{(m)}(y) = T^{-1} Z T T^{-1} Y_{sh} \tilde{V}^{(m)}(y) \quad (3.44a)$$

$$\frac{d \tilde{V}^{(m)}(y)}{dy} = T^{-1} Z \tilde{I}^{(m)}(y) \quad (3.44b)$$

Ahora suponga que  $T$  ha sido seleccionado de tal manera que las matrices  $T^{-1} Z T$  y  $T^{-1} Y T$  están matrices diagonales. En este caso, las ecuaciones (3.44) representan seis ecuaciones diferenciales desacopladas.

Los voltajes  $\tilde{V}^{(m)}(y)$  se llaman los voltajes modales de la línea y la transformación  $T$  se llama

una matriz de transformación modal. Del mismo modo, las corrientes  $\tilde{I}^{(m)}(y)$  se llaman corrientes modales. La procedimientos se llama descomposición modal. Las ventajas de la descomposición modal son obvias. La solución de las ecuaciones desacopladas (3.44) es idéntica a los métodos de solución para líneas monofásicas.

### 3.2.4.4 Modelos de secuencia

Un caso especial de descomposición modal da como resultado lo que se conoce como modelos de secuencia de una línea trifásica. Específicamente, muchas líneas de transmisión están transpuestas o su construcción es tal que los parámetros mutuos (inductancia, capacitancia) son aproximadamente los mismos para cualquier par de fases y los autoparámetros de fase también son aproximadamente los mismos para las tres fases. Por esta razón, se justifica aproximar una línea eléctrica trifásica con una línea simétrica. Matemáticamente, esto equivale a suponer que las matrices  $Z$  e  $Y$  tienen la siguiente estructura simétrica:

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{s,s} & Z_{s,m} & Z_{s,m} \\ Z_{s,m} & Z_{s,s} & Z_{s,m} \\ Z_{s,m} & Z_{s,m} & Z_{s,s} \end{bmatrix}$$

$$Y_{sh} = \begin{bmatrix} y_{sh,s} & y_{sh,m} & y_{sh,m} \\ y_{sh,m} & y_{sh,s} & y_{sh,m} \\ y_{sh,m} & y_{sh,m} & y_{sh,s} \end{bmatrix}$$

Tenga en cuenta que si las matrices  $Z_s$  y  $Y_{sh}$  no tienen esta estructura, que suele ser el caso, se ponen de esta forma utilizando las siguientes ecuaciones:

$$Z_{s,s} = \frac{1}{3} (Z_{aa} + Z_{bb} + Z_{cc})$$

$$Z_{s,metro} = \frac{1}{3} Z_{ab} \quad \text{antes de Cristo } Z_{ca}$$

$$Y_{sh,s} = \frac{1}{3} Y_{Autómata y decapó} Y_{CC}$$

$$Y_{sh,metro} = \frac{1}{3} Y_{ab} Y_{antes de Cristo } Y_{California}$$

El producto  $Z_s Y_{sh}$  de las dos matrices se calcula

$$Z_s Y_{sh} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

dónde

$$1 \quad Z_{s,s} Y_{sh,s} \quad 2 Z_{s,m} Y_{sh,m}$$

$$2 \quad Z_{s,m} Y_{sh,m} \quad Z_{s,s} Y_{sh,m} \quad Z_{s,m} Y_{sh,s}$$

Ahora, bajo el supuesto de simetría discutido, se define la matriz de transformación modal T como sigue:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_2 & a & 1 \\ a & a_2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ dónde } a = mi^{120^\circ}. \text{ Tenga en cuenta que la inversa de esta matriz es:}$$

$$T^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a_2 \\ 1 & a_2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Los voltajes modales  $\tilde{V}^m(y)$  en este caso se denotará por

$$\tilde{V}_{120}(y) = \begin{bmatrix} \tilde{V}_1(y) \\ \tilde{V}_2(y) \\ \tilde{V}_0(y) \end{bmatrix}$$

y las corrientes modales se denotarán por



$$\frac{d^2 \tilde{V}_0(y)}{dy^2} = \tilde{\rho}_{00} \tilde{V}_0(y) \tag{3.48a}$$

$$\frac{d \tilde{I}_0(y)}{dy} = \tilde{z}_0 \tilde{I}_0(y) \tag{3.48b}$$

Ahora es evidente que las ecuaciones (3.46), (3.47) y (3.48) representan tres líneas monofásicas. Nosotros se referirá a la Ecuación (3.46) como el modelo de secuencia positiva de la línea, a las Ecuaciones (3.47) como el modelo de secuencia negativa y a las Ecuaciones (3.48) como el modelo de secuencia cero de la línea. Tenga en cuenta que los parámetros  $\gamma(p, z)$  del modelo de secuencia negativa son idénticos a los del modelo positivo modelo de secuencia. Colectivamente, nos referiremos a la Ecuación (3.45) o de manera equivalente. Las ecuaciones (3.46), (3.47) y (3.48) como modelo de secuencia de una línea trifásica. Los voltajes y corrientes modales se denominarán componentes simétricos de las corrientes y voltajes. Además, los parámetros de los modelos de secuencia se definen de la siguiente manera:

$\alpha_1$  y  $\beta_1$  se denominarán constantes de propagación de secuencia positiva (o negativa) y cero del línea.

$z_1$  y  $z_0$  se llamará serie de secuencia positiva (o negativa) y cero por unidad de longitud impedancia de la línea.

Con el fin de completar la discusión del modelo de secuencia, recuerde que

$$Z_{seq}^{-1} T^{-1} Z_s Y_{sh} T$$

Considera lo siguiente:

$$Z_{seq}^{-1} T^{-1} Z_s Y_{sh} T = Z_{s, seq}^{-1} Y_{sh, seq}$$

dónde:

$$Z_{s, seq}^{-1} = T^{-1} Z_s^{-1} T \quad Y_{sh, seq} = T^{-1} Y_{sh} T$$

Tras la evaluación de  $Y_{sh, seq}$ , tenemos

$$Y_{sh, seq} = \begin{bmatrix} y_{sh,1} & 0 & 0 \\ 0 & y_{sh,1} & 0 \\ 0 & 0 & y_{sh,0} \end{bmatrix}$$

dónde

$$y_{sh,1} = y_{sh,s} + y_{sh,m} \\ y_{sh,0} = y_{sh,s} + 2y_{sh,m}$$

Tenga en cuenta que  $y_1'$  y  $y_0'$  son la derivación de secuencia positiva (o negativa) y cero por unidad de longitud admisión de la línea.

En términos de los parámetros  $y_1'$ ,  $y_0'$ , las constantes de propagación  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  y  $\gamma_0$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \sqrt{Z_{s,1} y_{sh,1}} \tag{3.49a}$$

$$\gamma_0 = \sqrt{Z_{s,0} y_{sh,0}} \tag{3.49b}$$

y las impedancias características:

$$Z_b = Z_0 \sqrt{\frac{Z_{s,1}}{y_{sh,1}}} \tag{3.50a}$$

$$Z_0^0 = \sqrt{\frac{Z_{s,0}}{y_{sh,0}}} \tag{3.50b}$$

En resumen, la aplicación de la simétrica transformación de componentes en la línea trifásica ecuaciones da como resultado los modelos de secuencia de la línea (es decir, los modelos de secuencia positiva, negativa y cero). Cada modelo es idéntico a un modelo de línea monofásico. Los parámetros de los modelos de secuencia positiva son iguales a los parámetros del modelo de secuencia negativa.

Es conveniente una interpretación física de los modelos de secuencia de una línea de transmisión trifásica. Para este propósito, suponga que solo un componente simétrico del voltaje o la corriente es presente

$\tilde{V}_1$        $\tilde{V}_2$        $\tilde{V}_0$   
es decir  $I$

presente una corriente de secuencia positiva,

Las corrientes de fase reales  $I_a(y)$ ,  $I_b(y)$ ,  $I_c(y)$  se obtienen de la transformación inversa T-1:

$$\tilde{I}_{abc}(y) T = \begin{bmatrix} \tilde{Y}_0 y & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{I}_1(y) & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{Y}_0(y) e^{j240^\circ} \end{bmatrix}$$

Como se desprende de la ecuación anterior, las corrientes trifásicas están equilibradas y son de secuencia positiva. El caso se muestra en la Figura 3.22a, que ilustra las corrientes trifásicas. Nota que la corriente eléctrica en el suelo es cero.

Si el componente de secuencia negativa está presente e las  $\tilde{V}_2$        $\tilde{V}_0$   
es decir,  $I$        $\tilde{I}_2$        $\tilde{I}_0$ ,  $\tilde{I}_1$  corrientes de fase reales son

$$\tilde{I}_{abc}(y) = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{I}_2(y) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{I}_2(y) \\ \tilde{I}_2(y) e^{j240^\circ} \\ \tilde{I}_2(y) e^{j120^\circ} \end{bmatrix}$$

Una vez más, como se desprende de la ecuación anterior, las corrientes trifásicas están equilibradas pero son de secuencia negativa. El caso se muestra en la Figura 3.22b, que ilustra las corrientes trifásicas. Tenga en cuenta que la corriente eléctrica en la tierra es cero.

Finalmente

El componente de secuencia cero está presente, las

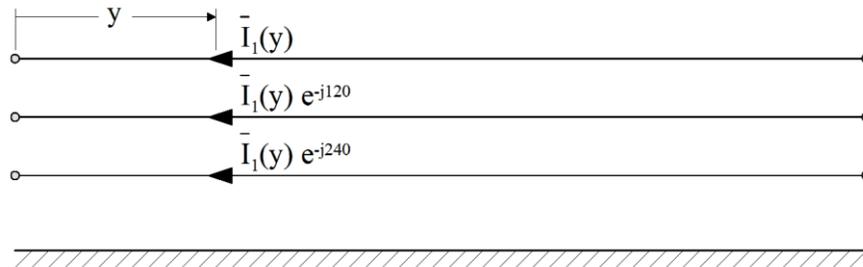
es decir, yo

, la corrientes de fase reales son

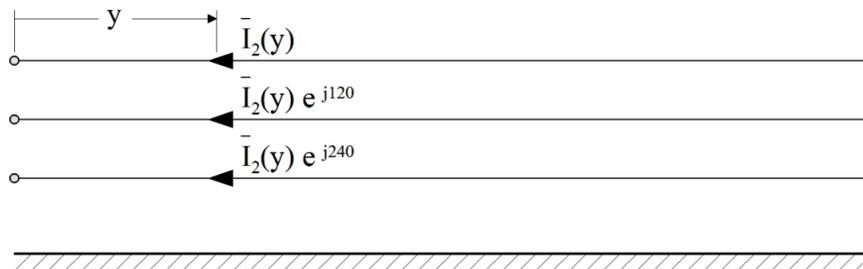
$$\tilde{Y}_{abc}(y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{I}_0(y) \\ \tilde{I}_0(y) \\ \tilde{I}_0(y) \end{bmatrix}$$

Como se desprende de la ecuación anterior, las tres corrientes de fase son idénticas. La secuencia no se puede definir para estas corrientes, de ahí el nombre "secuencia cero". La corriente de tierra será la negativa

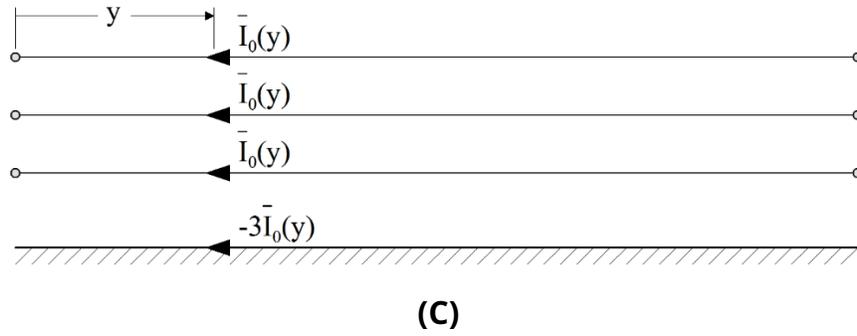
de la suma de las corrientes de fase [es decir,  $3\tilde{I}_0(y)$ ]. El caso se muestra en la Figura 3.22c.



(a)



(b)



**Figura 3.20: Ilustración de los componentes simétricos en una línea de transmisión**

(a) Componentes de secuencia positiva, (b) Componentes de secuencia negativa, (c) Componentes de secuencia cero

**Ejemplo E3.4:** Considere la línea de transmisión del ejemplo E3.2 y del ejemplo E3.3. Calcule los parámetros de secuencia de la línea.

**Solución:** La matriz Z de la línea, calculada a 60 Hz y luego simetrizada es:

$$Z = \begin{bmatrix} 0.2323 & j0.8901 & 0.0593 & j0.4330 & 0.0593 & j0.4330 \\ 0.0593 & j0.4330 & 0.2323 & j0.8901 & 0.0593 & j0.4330 \\ 0.0593 & j0.4330 & 0.0593 & j0.4330 & 0.2323 & j0.8901 \end{bmatrix} 10^3 \text{ ohmios / metro}$$

La matriz Y 'de la línea, calculada a 60 Hz y luego simetrizada es:

$$Y' = \begin{bmatrix} j3.0331 & j0.5556 & j0.5556 \\ j0.5556 & j3.0331 & j0.5556 \\ j0.5556 & j0.5556 & j3.0331 \end{bmatrix} 10^9 \text{ S / m}$$

El producto ZY 'es

$$ZY' = \begin{bmatrix} -2.2186 + j0.6387 & -0.5782 + j0.0178 & -0.5782 + j0.0178 \\ -0.5782 + j0.0178 & -2.2186 + j0.6387 & -0.5782 + j0.0178 \\ -0.5782 + j0.0178 & -0.5782 + j0.0178 & -2.2186 + j0.6387 \end{bmatrix} 10^{12} \text{ metro}^{-2}$$

Tras la aplicación de la transformación T, tenemos

$$z_1 = \begin{bmatrix} 0.173 & j0.4571 \end{bmatrix} 10^3 \text{ / metro}$$

$$z_0 = \begin{bmatrix} 0.3509 & j1.7561 \end{bmatrix} 10^3 \text{ / metro}$$

$$y'_1 = j3.5887 10^9 \text{ S / m}$$

$$y'_0 = j1.9219 10^9 \text{ S / m}$$

$$\text{metro}^{-1} \begin{bmatrix} 1.6404 & j0.6209 \end{bmatrix} 10^{12} \text{ metro}^{-2}$$

$$\text{metro}^{-1} \begin{bmatrix} 3.375 & j0.6743 \end{bmatrix} 10^{12} \text{ metro}^{-2}$$

Las constantes de impedancia y propagación características de los componentes de la secuencia son:

$$Z_0^1 = \sqrt{\frac{z_1}{y'_1}} = 369 \text{ m} \angle 10.365^\circ$$

$$\beta_{\text{seq}} = \beta_{\text{seq}} \sqrt{z_1 y'_1} = 1.3244 10^6 \text{ m}^{-1} \angle 79.63^\circ$$

Componentes de secuencia cero:

$$Z_0^0 = \sqrt{\frac{Z_0}{y'_0}} = 965 \text{ mi}^{5,65} \text{ ohmios}$$

$$p_{\text{avg}} = \sqrt{Z_0 y'_0} = 1.8552 \cdot 10^6 \text{ mi}_j^{84,35} \text{ metro}^{-1}$$

En resumen de esta sección, la transformación de componente simétrico proporciona una herramienta para la solución simplificada de las ecuaciones de una línea multifásica. También produce los modelos de secuencia de una línea trifásica. En este caso el análisis de líneas trifásicas se reduce al análisis de tres líneas de transmisión monofásicas, los modelos de línea de secuencia positiva, secuencia negativa y secuencia cero.

### 3.2.5 Circuitos equivalentes a la línea de transmisión

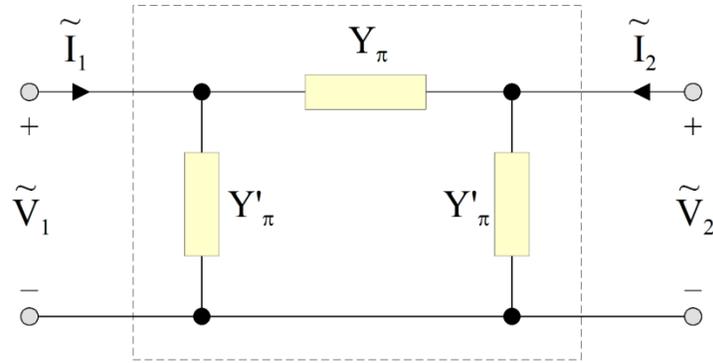
En la sección anterior hemos desarrollado modelos de líneas monofásicas, así como trifásicas, en condiciones de estado estacionario. Los modelos están en términos de los parámetros A, B, C o, alternativamente, en términos de impedancia característica, constante de propagación y longitud de línea. Una representación alternativa de las líneas de transmisión en condiciones de estado estacionario es mediante circuitos equivalentes. Este enfoque es más atractivo debido a la familiaridad de los ingenieros con los circuitos. Esta sección presenta el cálculo de circuitos equivalentes a partir de los parámetros de la línea de transmisión. Solo se demostrará el caso de la línea monofásica. Dado que una línea trifásica se puede reducir a tres líneas monofásicas mediante la transformación de componentes simétricos, la extensión a líneas trifásicas se dejará al lector como ejercicio.

Considere las ecuaciones (3.40) de una línea monofásica en términos de corrientes y voltajes terminales. De la teoría de la realización se sabe que se puede encontrar un circuito de dos puertos que se describe con las mismas ecuaciones. Además, este circuito de dos puertos no es único. De la multiplicidad de circuitos equivalentes, un circuito en particular ha sido popular entre los ingenieros de energía: el equivalente. Este circuito se presenta a continuación.

A una línea de transmisión con constantes A, B, C, corresponde un -circuito equivalente con elementos Y, Y' como en la Figura 3.21. Los elementos Y, Y' de El -Los circuitos equivalentes se calculan expresando primero las corrientes de los terminales de línea como una función de los voltajes de los terminales de línea y las siguientes aplicación de la teoría de circuitos. Específicamente, las corrientes de los terminales de línea en función del terminal de línea Los voltajes en términos de los parámetros A, B y C, son:

$$\tilde{I}_1 = V_1 \frac{A}{B} \sim \frac{1}{B_2} \tilde{V} \quad (3.51a)$$

$$\tilde{I}_2 = \frac{1}{B} \tilde{V}_1 - \frac{A}{B} \tilde{V}_2 \quad (3.51b)$$



**Figura 3.21: -circuito equivalente**

Por otro lado, la ecuación para el circuito de la Figura 3.23 es:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 &= (Y + Y')\tilde{V}_1 - Y'\tilde{V}_2 \\ \tilde{I}_2 &= -Y'\tilde{V}_1 + (Y + Y')\tilde{V}_2 \end{aligned}$$

Para la equivalencia, debe cumplirse lo siguiente:

$$Y = \frac{1}{B} \quad (3.52a)$$

$$Y' = \frac{A-1}{B} \quad (3.52b)$$

Las ecuaciones (3.52) definen los parámetros del -circuito equivalente de una línea. Estos parámetros son la admitancia en serie del circuito equivalente,  $Y$ , y la admitancia en derivación del circuito equivalente,  $Y'$ . Los parámetros de impedancia del circuito equivalente será:

$$Z = \frac{1}{Y} = B \operatorname{csch}(\rho a g)$$

$$Z' = \frac{1}{Y'} = \frac{B}{A-1} = \frac{Z_0 \sinh(\rho a g)}{\operatorname{aporrrear}(\rho a g) - 1}$$

**Nominal -Circuito equivalente:** El nominal -circuito equivalente de una línea de transmisión es una aproximación de los equivalentes exactos. En general, estas aproximaciones son válidas para líneas cortas; por tanto, se utiliza alternativamente el nombre "equivalente de línea corta". Considera el -circuito equivalente descrito por los parámetros  $Z$ , y  $Z'$ , como se derivó anteriormente. El nominal -El circuito equivalente se obtiene aproximando las funciones de seno y coseno hiperbólicas. Específicamente, asumiendo que  $\rho a g \ll 1$ , (este supuesto es equivalente al supuesto de línea corta, es decir es pequeño), las funciones se expanden en una serie y luego solo se conservan los términos principales:

$$p \approx \frac{r}{Z_0} + \frac{j\omega L}{Z_0} + \frac{1}{Z_0} \frac{(r + j\omega L)^2}{2}$$

$$p \approx \frac{r}{Z_0} + \frac{j\omega L}{Z_0} + \frac{1}{Z_0} \frac{(r + j\omega L)^2}{2}$$

Sustitución de las aproximaciones anteriores en las ecuaciones de los parámetros  $Z$ , y  $Z'$ , rinde:

$$Z \approx Z_0 \left[ 1 + \frac{r}{Z_0} \frac{l}{2} + \frac{j\omega L}{Z_0} \frac{l}{2} + \frac{1}{Z_0} \frac{(r + j\omega L)^2 l^2}{8} \right] \quad (3.53a)$$

$$Z' \approx \frac{1}{Z_0} \left[ \frac{Z_0}{2} + \frac{r}{2} \frac{l}{2} + \frac{j\omega L}{2} \frac{l}{2} + \frac{1}{2} \frac{(r + j\omega L)^2 l^2}{8} \right] \quad (3.53b)$$

Normalmente, la aproximación nominal pi-equivalente se puede hacer cuando el producto  $pl$  es pequeño. Por ejemplo, para una precisión del 0,1%, debería ser inferior a 0,025. Para el modelo de 60 Hz, esto significa una línea de aproximadamente menos de 12 millas.

El cálculo de circuitos equivalentes para una línea de transmisión se ilustrará con un ejemplo.

**Ejemplo E3.5:** Considere el modelo de secuencia positiva de la línea trifásica del ejemplo E3.4.

Los parámetros calculados son  $Z_0 = 369e^{-j10.36}$  ohmios y  $p = 1,3244 \cdot 10^{-6} e^{j79.63}$  m-1.

Suponga que la línea tiene 85 millas de largo y calcule:

- El  $\pi$ -circuito equivalente.
- El nominal  $\pi$ -circuito equivalente.
- Compare los dos modelos

**Solución:** Primero, los parámetros  $A$ ,  $B$ ,  $C$  de la línea se calculan de la siguiente manera:

$$p \approx 0.18113e^{j79.63}$$

$$\cosh pl \approx 0.984659 + j0.005809 \quad 0.984676e^{j0.34}$$

$$\sinh pl \approx 0.032092 + j0.177323 \quad 0.180204e^{j79.74}$$

$$A \approx 0.984676e^{j0.34}, B \approx 66.4953e^{j69.38}, C \approx 0.000488e^{j90.1}$$

$$(a) \quad Z = B = (23,417 + j62,235)$$

$$Z' = \frac{B}{A} = (8.489 + j4053.59)$$

La -El circuito equivalente se ilustra en la figura E6.1a.

$$(B) \quad Z_{l_0} = Z_{pl} = 66,837 \text{ m}\Omega \angle 69,7^\circ = (23.658 + j62.509)$$

$$Z' = \frac{2z'}{l} = \frac{2Z_0}{\text{p}\mu\text{g}} = 4079.42e^{j90^\circ} = (j4074.4)$$

El nominal -El circuito equivalente se ilustra en la Figura E3.6c.

(C) Los dos circuitos equivalentes están muy cerca.

**Ejemplo E3.6:** Una línea de transmisión trifásica tiene lo siguiente por unidad de longitud positiva parámetros de secuencia

Resistencia:  $R = 0.08$  ohmios / milla  $L = 1.1$

Inductancia:  $10^{-6}$  Henries / metro

Capacidad:  $C = 10,8 \cdot 10^{-12}$  faradios / metro

La línea tiene 200 millas de largo.

- a) Calcule la secuencia positiva -circuito equivalente de la línea. Calcule la  
 B) secuencia positiva nominal circuito equivalente de la línea.

**Solución:**

$$a) \quad z = 0,08 + j0,667 \text{ } \Omega/\text{mi y} \\ = j6.551 \cdot 10^{-6} \text{ S / milla}$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{z}{y}} = 320,28 - j3.418 = 319,71 \angle 19,10^\circ$$

$$\sqrt{zy} = 0.4196 - j86,58 = 0.0250 \angle -90,4189^\circ$$

$$Z' = Z_c \text{ pecado } \frac{l}{2} = 130.417 - j83,36 = 15,08 + j129,64$$

$$\frac{y'}{2} = \frac{1}{Z_c} \tanh \frac{l}{2} = 1,19 \cdot 10^{-6} = j6.646 \cdot 10^{-4} \text{ S}$$

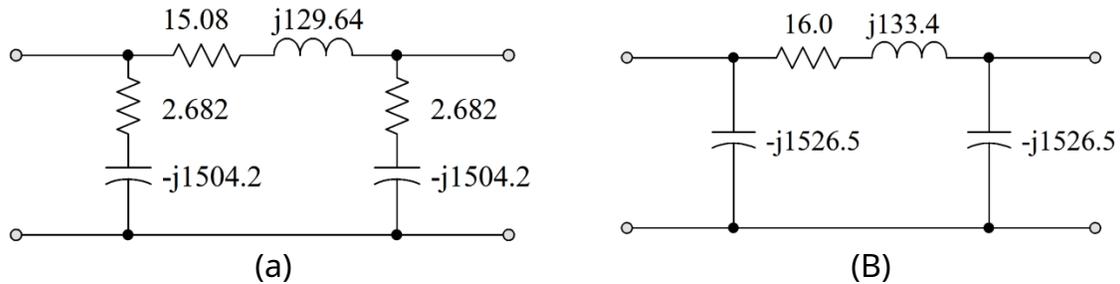
$$\frac{2}{y'} = 2,682 - j1504,2$$

b) Los parámetros nominales del circuito equivalente son:

$$Z = z/l = 16 + j133.4 = 134,35 \angle 83,16^\circ$$

$$\frac{2}{Y} = \frac{2}{y} = 1526,5$$

Los resultados de este ejemplo se muestran en la Figura E3.9.



**Figura E3.6: Circuitos equivalentes de secuencia positiva**

(a) Circuito equivalente a pi, (b) Circuito equivalente a pi nominal

(Todos los valores indicados están en ohmios)

Los métodos de cálculo anteriores para los parámetros de líneas y circuitos equivalentes de líneas se han demostrado para la frecuencia de potencia fundamental. Se pueden aplicar los mismos procedimientos para cualquier frecuencia. Como ejemplo, aplicamos estos procedimientos computacionales para los parámetros de línea y circuitos equivalentes para los 7<sup>th</sup> armónico (420 Hz).

**Ejemplo E3.6:** Considere la línea de transmisión de 230 kV de la Figura E3.6. Para simplificar, suponga que los conductores de fase son de aluminio de una pulgada de diámetro de conductividad 40,000,000 S / m. La línea tiene 57 millas de largo. Calcule la secuencia positiva, negativa y cero. -circuito equivalente de la línea para el 7<sup>th</sup> armónico. Por simplicidad, descuide los cables de protección.

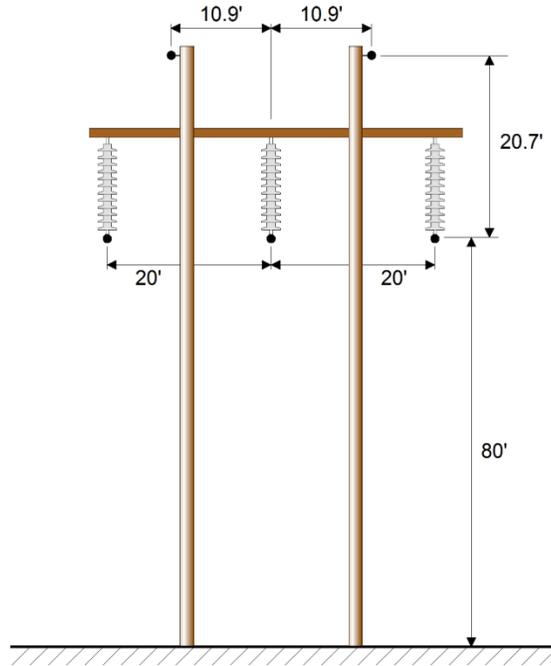


Figura E3.6

**Solución:** Las matrices de resistencia e inductancia se calculan utilizando las ecuaciones de Carsons. La

los resultados son:

$$k = \sqrt{364,26} \text{ metro}$$

$$ka = 4.625$$

$$METR_0(ka) = 4,7$$

$$_0(ka) = 162,0_0$$

$$METR_1(ka) = 4,3$$

$$_1(ka) = 260,0_0$$

$$r_{c,A} = 9,96 \times 10^{-5} \text{ ohmios} / m$$

$$0.5689$$

$$D_{ae} = 0.011016 \text{ metro} = 0.03614 \text{ pie}$$

$$r_{mi} = 0,00159 F = 0,6678 \text{ ohmios} / mi = 41,5 \times 10^{-5} \text{ ohmios} / m$$

$$D_{mi} = 2160 \sqrt{F} = 1.053,97 \text{ pie} = 321.25 \text{ metro}$$

$$R = \begin{bmatrix} 51,46 & 41,5 & 41,5 \\ 41,5 & 51,46 & 41,5 \\ 41,5 & 41,5 & 51,46 \end{bmatrix} \text{ } \Omega / \text{metro}$$

$$L = \begin{bmatrix} 2,056 & 0,793 & 0,654 \\ 0,793 & 2,056 & 0,793 \\ 0,654 & 0,793 & 2,056 \end{bmatrix} \text{ } H / m$$

$$C = \begin{bmatrix} 8,253 & 2,087 & 1,416 \\ 2,087 & 8,253 & 2,087 \\ 1,416 & 2,087 & 8,253 \end{bmatrix} \text{ } pF / m$$

De las matrices anteriores se obtienen los siguientes parámetros:

Secuencia positiva / negativa:

$$r_1 = 99,6 \text{ } \Omega / \text{metro}, \quad L_1 = 1,3093 \text{ } H / m, \quad C_1 = 8,758 \text{ } pF / m$$

Secuencia cero:

$$r_0 = 1344,6 \text{ } \Omega / \text{metro}, \quad L_0 = 3,5493 \text{ } H / m, \quad C_0 = 4,651 \text{ } pF / m$$

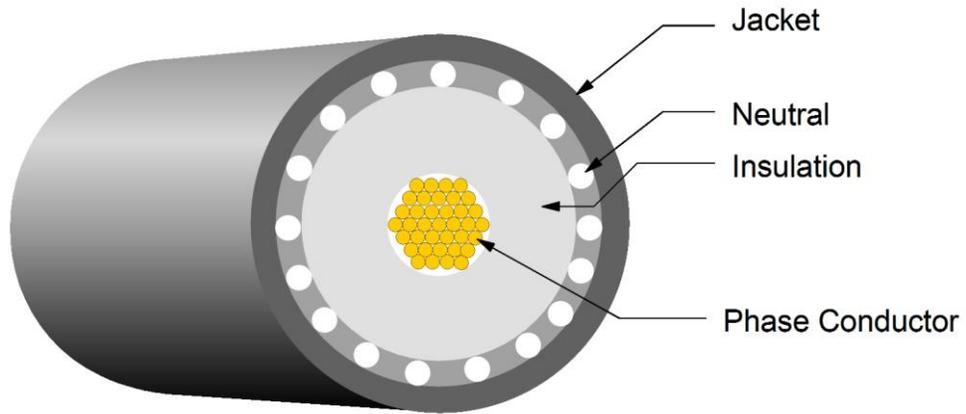
Los parámetros de los circuitos equivalentes son:

Secuencia positiva / negativa

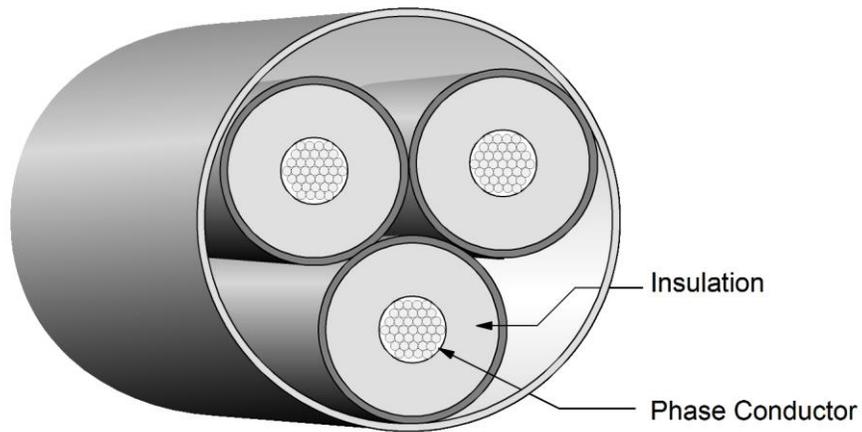
### 3.3 Modelado de cables

Los cables de alimentación son muy habituales para los sistemas de distribución de media y baja tensión. Recientemente, hemos visto un mayor uso de cables de transmisión UG de 138 kV a 345 kV. Existe una variedad de diseños de cables. La figura 3.22 ilustra una construcción de cable de voltaje medio neutro concéntrico. La Figura 3.23 ilustra una construcción de cable trifásico (voltaje medio o alto). La Figura 3.24 ilustra un cable de voltaje secundario de tres hilos (2x120V).

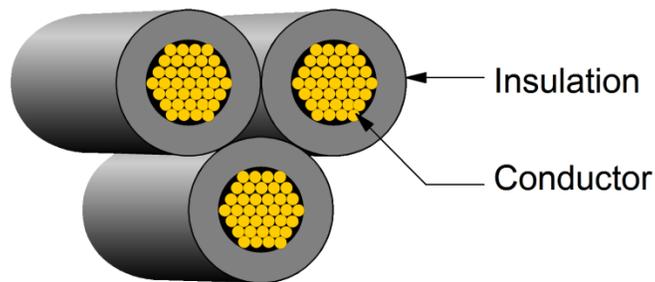
Los diseños de cables tienen geometrías bastante complicadas y el análisis y el cálculo precisos de sus parámetros es muy complejo y, a todos los efectos prácticos, se realiza mediante modelos informáticos. En este capítulo, presentamos la base y los procedimientos computacionales para la evaluación de los parámetros de los cables. A la teoría le siguen ejemplos de parámetros de cable para geometrías de cable habituales.



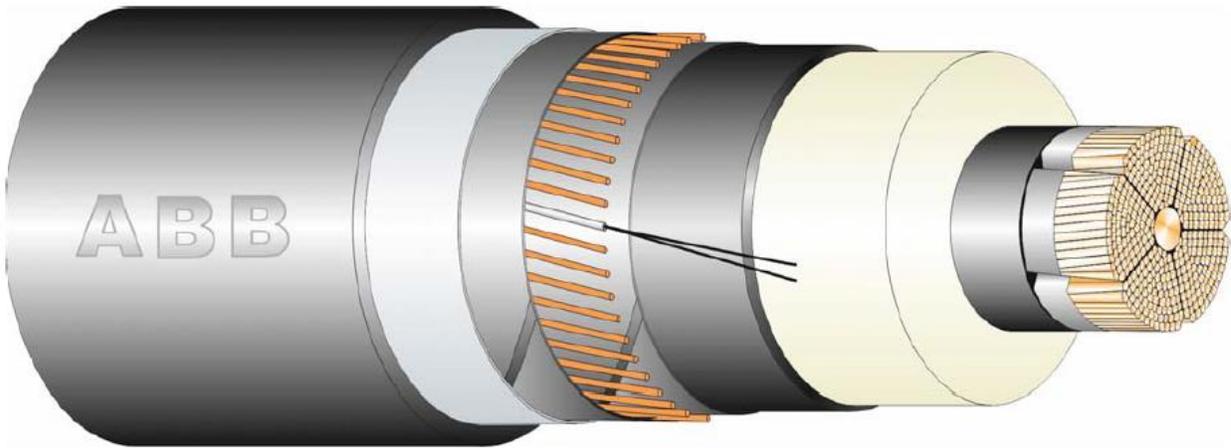
**Figura 3.22: Cable concéntrico neutro de media tensión**



**Figura 3.23: Cable trifásico de media tensión**



**Figura 3.24: Cable de clase 600V del sistema secundario**



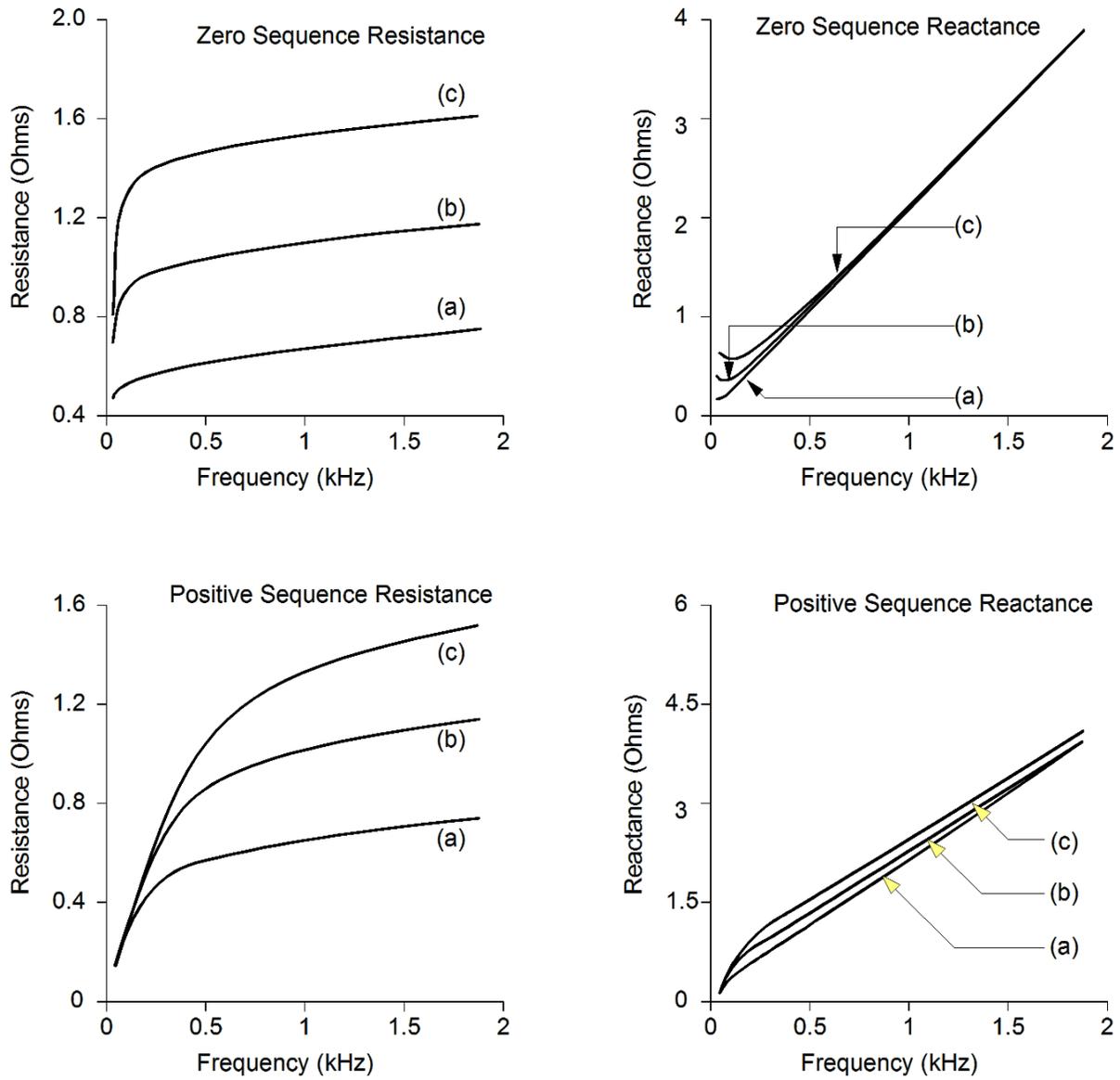
**Figura 3.25: Cable de transmisión de 135 kV, 3000 kcm - Fabricante: ABB**  
(tenga en cuenta las fibras en un tubo de metal que ocupa la ubicación de un cable de blindaje de cobre)

### 3.3.1 Metodologías para el cálculo de parámetros de cables

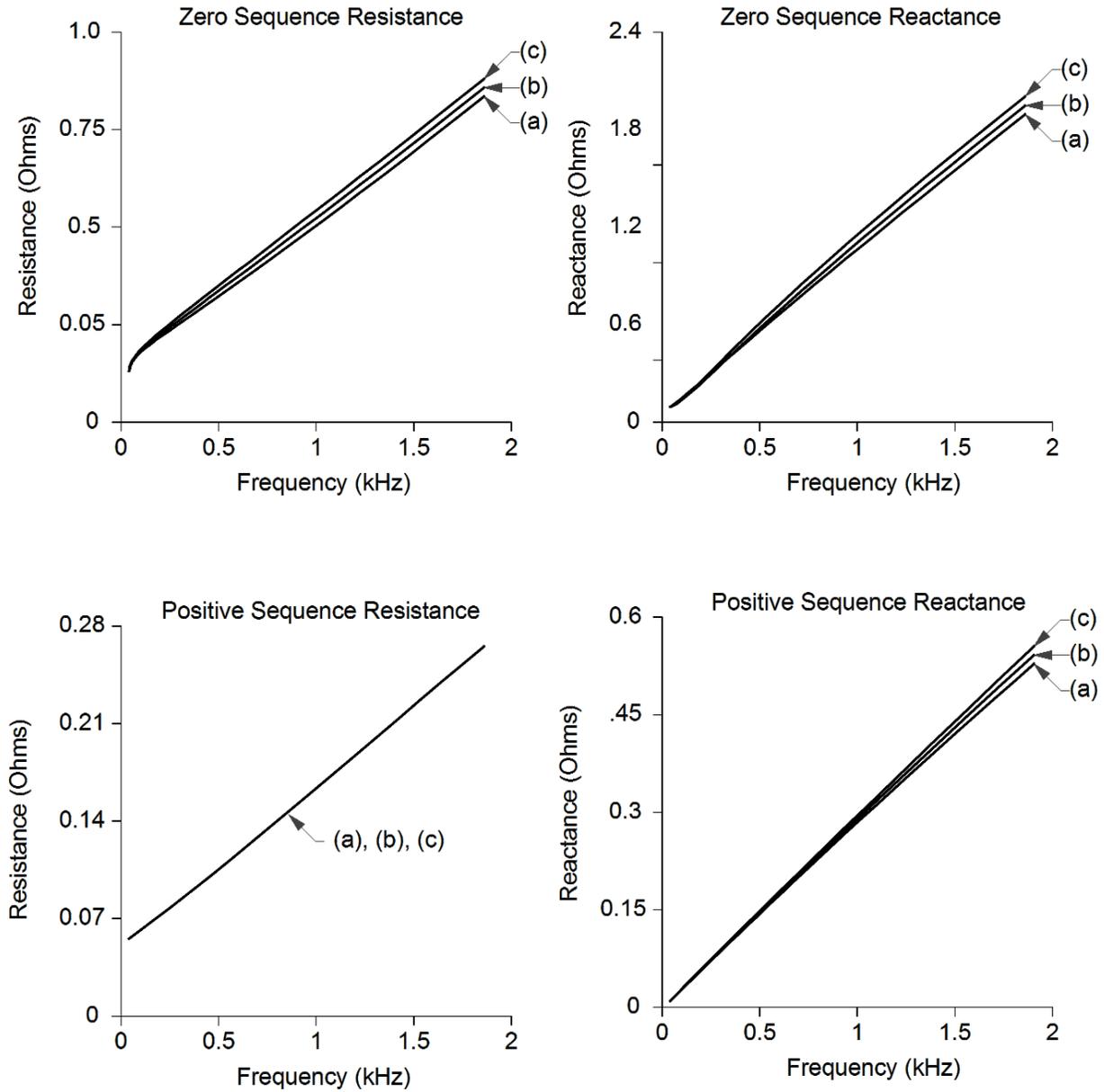
para ser agregado

### 3.3.2 Parámetros típicos de cables

Las figuras que siguen presentan variaciones típicas de los parámetros del cable neutro concéntrico frente a la frecuencia. Se debe observar que si bien la reactancia del cable es bastante insensible a la resistividad del suelo, la resistencia del cable es bastante sensible a la resistividad del suelo, especialmente a medida que la frecuencia aumenta. A todos los efectos prácticos, los parámetros de los cables se calculan mediante ordenador programas.



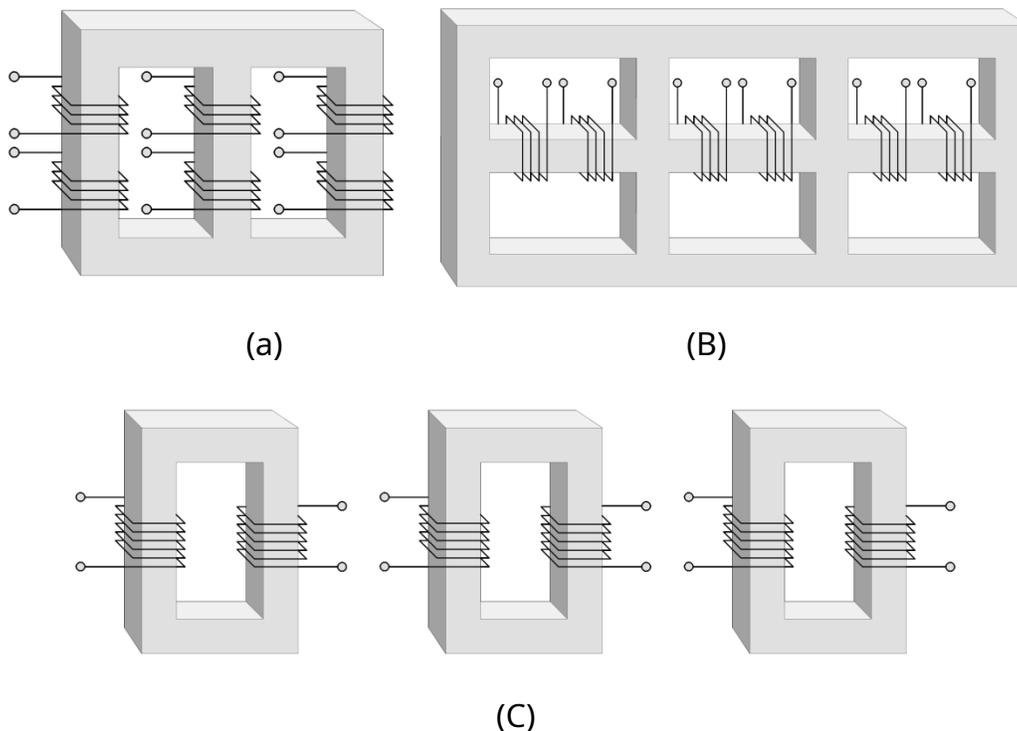
**Figura 3.25: Análisis paramétrico de parámetros de secuencia de cable neutro concéntrico de 15 kV**  
 [(a) Resistividad del suelo de 10 ohm.m, (b) Resistividad del suelo de 100 ohm.m, (c) Resistividad del suelo de 1000 ohm.m]



**Figura 3.26: Análisis paramétrico de parámetros de secuencia de cables de 600 V**  
 [(a) Resistividad del suelo de 10 ohm.m, (b) Resistividad del suelo de 100 ohm.m, (c) Resistividad del suelo de 1000 ohm.m]

### 3.4 Modelado de transformadores

Los transformadores pueden ser monofásicos o trifásicos, dos devanados o múltiples devanados, y algunos devanados pueden tener toma central. En general, las bobinas de un transformador están eléctricamente aisladas entre sí, lo que permite el aislamiento de los circuitos que pueden conectarse a estas bobinas. Los transformadores trifásicos se pueden construir de varias formas. En la figura 3.27 se ilustran tres de las construcciones más habituales. La figura 3.27a ilustra un transformador de tipo núcleo trifásico. El núcleo tiene tres patas, en cada pata hay dos vueltas para un total de seis vueltas. De manera similar, la figura 3.27b ilustra un transformador de tipo carcasa que también tiene seis devanados. La figura 3.27c ilustra un "banco" de tres transformadores monofásicos. Esta disposición también tiene seis devanados. Los seis devanados de cualquier configuración (a), (b) o (c) se agrupan en dos grupos de tres, el primario y el secundario. Por ejemplo, en la Figura 3.27a, el primario puede ser los tres devanados ubicados en la parte superior de cada pata y el secundario pueden ser los otros tres devanados. Tanto el devanado primario como el secundario se pueden conectar en configuraciones delta o en estrella que conducen a cuatro posibles disposiciones de un transformador trifásico: (a) delta-delta, (b) estrella-delta, (c) delta-estrella y (d) estrella-estrella. Estos arreglos se representan esquemáticamente en la Figura 3.28. Tenga en cuenta que desde el punto de vista del circuito, todas las construcciones de transformadores trifásicos son similares, es decir, todos tienen seis devanados agrupados en tres fases. Sin embargo, el circuito magnético de cada una de estas construcciones es diferente. Por ejemplo, el banco de transformadores trifásicos consta de tres circuitos magnéticos independientes. Los transformadores trifásicos tipo carcasa y núcleo se caracterizan por tener circuitos magnéticos acoplados de las tres fases.

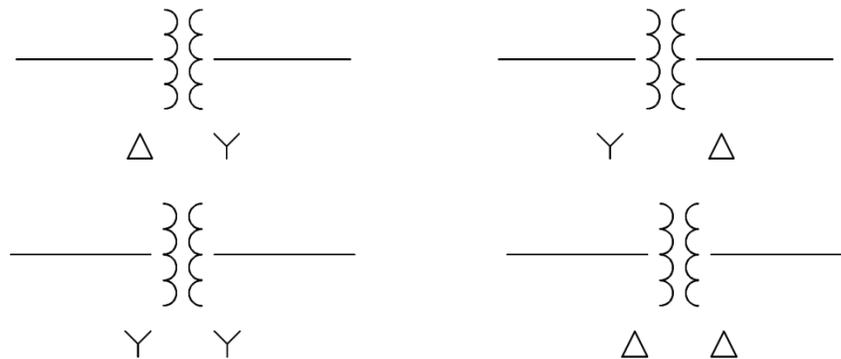


**Figura 3.27: Transformadores trifásicos**  
(a) Núcleo Type, (b) Tipo de carcasa, (c) Banco de transformadores trifásicos

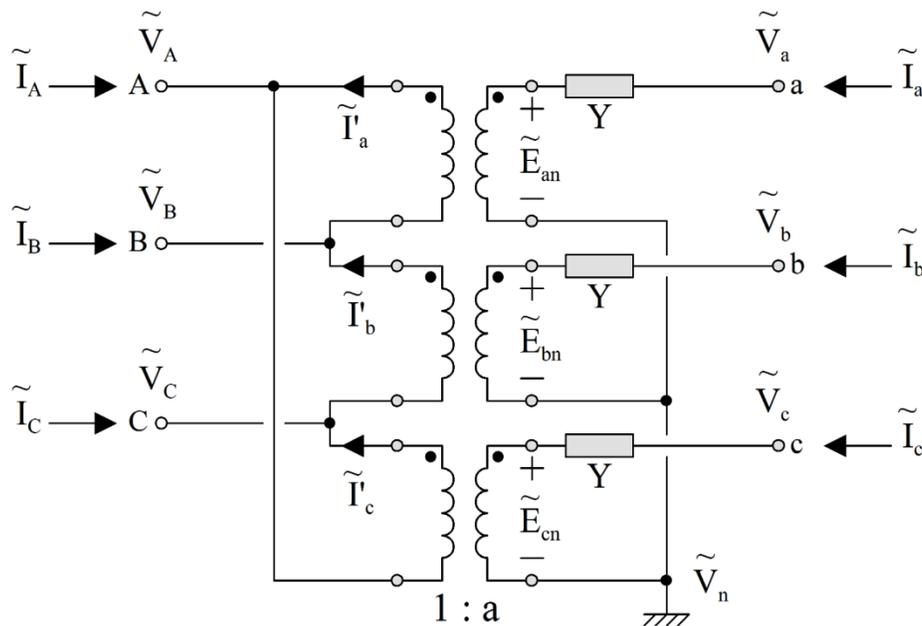
El modelo de banco de transformadores trifásicos es el más sencillo ya que consiste en la interconexión de tres transformadores monofásicos. Reemplazando cada uno de los transformadores monofásicos por su circuito equivalente, se obtiene el circuito equivalente del transformador trifásico. Esto se ha hecho en la Figura 3.29 donde se ha utilizado el circuito equivalente simplificado de un transformador monofásico. La Figura ilustra una conexión delta-estrella.

En los párrafos siguientes consideraremos primero el modelo ideal de transformador trifásico con el fin de examinar sus características básicas. Luego se estudiará el modelo de transformador no ideal. El uso de la transformación simétrica al modelo de transformador trifásico

dar como resultado los modelos de secuencia.



**Figura 3.28: Representación esquemática de transformadores trifásicos**



**Figura 3.29: Modelo de transformador trifásico conectado Delta-Wye**

### 3.4.1 El transformador trifásico ideal

Un transformador trifásico ideal consta de tres transformadores monofásicos ideales. El transformador de la Figura 3.29 será ideal si  $Y$  (cortocircuito). Las relaciones de voltaje de un transformador trifásico ideal son:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{AB} &= a_1 \tilde{V}_{un} \\ \tilde{V}_{California} &= a_1 \tilde{V}_{cn} \\ \tilde{V}_{antes\ de\ Cristo} &= a_1 \tilde{V}_{bn}\end{aligned}$$

En condiciones de funcionamiento equilibradas, los voltajes serán:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{Bn} &= \tilde{V}_{un} e^{j120^\circ} \\ \tilde{V}_{cn} &= \tilde{V}_{un} m i e^{j240^\circ} \\ \tilde{V}_{bn} &= \tilde{V}_{un} m i e^{j120^\circ} \\ \tilde{V}_{cn} &= \tilde{V}_{un} m i e^{j240^\circ}\end{aligned}$$

Tenga en cuenta que:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{California} &= \tilde{V}_{cn} = \tilde{V}_{un} m i e^{j240^\circ} \\ \tilde{V}_{antes\ de\ Cristo} &= \tilde{V}_{bn} = \tilde{V}_{un} m i e^{j120^\circ} \\ \tilde{V}_{AB} &= \tilde{V}_{un} e^{j120^\circ} \\ \tilde{V}_{California} &= \tilde{V}_{cn} = \tilde{V}_{un} m i e^{j240^\circ} \\ \tilde{V}_{antes\ de\ Cristo} &= \tilde{V}_{bn} = \tilde{V}_{un} m i e^{j120^\circ} \\ \tilde{V}_{California} &= \tilde{V}_{cn} = \tilde{V}_{un} m i e^{j240^\circ} \\ \tilde{V}_{antes\ de\ Cristo} &= \tilde{V}_{bn} = \tilde{V}_{un} m i e^{j120^\circ}\end{aligned}$$

Ahora se puede encontrar la relación entre los voltajes primario y secundario.

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{un} &= \frac{m i e^{j30^\circ}}{a \sqrt{3}} \tilde{V}_{un} \\ \tilde{V}_{Bn} &= \frac{m i e^{j30^\circ}}{a \sqrt{3}} \tilde{V}_{bn} \\ \tilde{V}_{Cn} &= \frac{m i e^{j30^\circ}}{a \sqrt{3}} \tilde{V}_{cn}\end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores indican que el modelo equivalente por fase (secuencia positiva) de un transformador trifásico ideal conectado delta-estrella es un transformador ideal monofásico con transformación

proporción  $\frac{1}{a \sqrt{3}} e^{j30^\circ}$ .